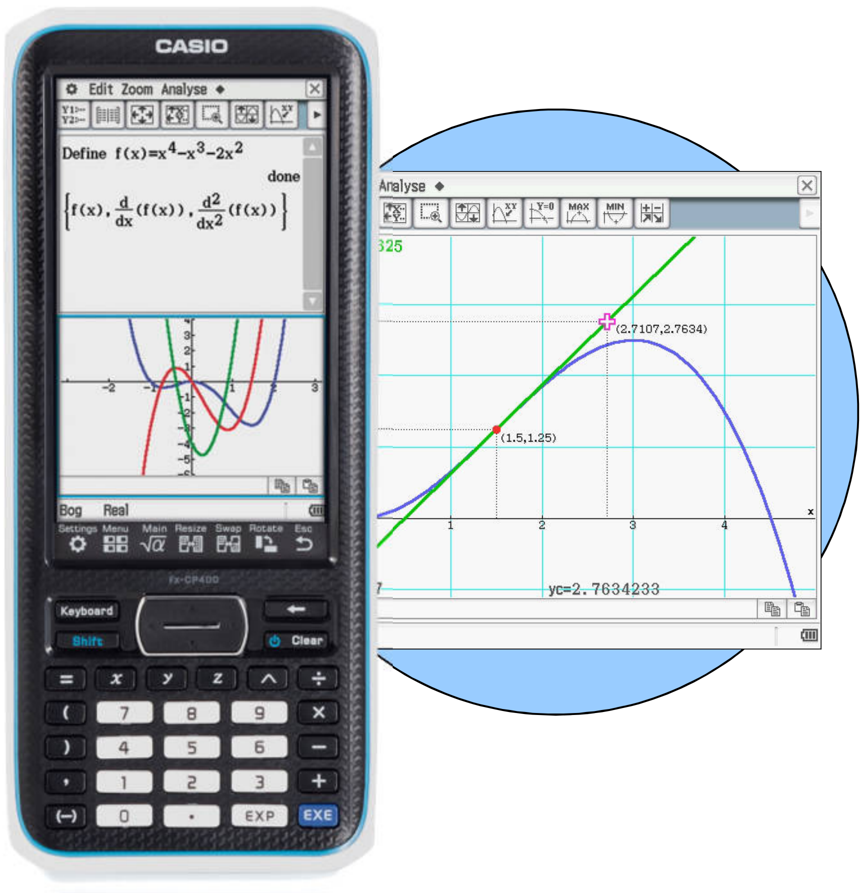
# CiMS Hamburg

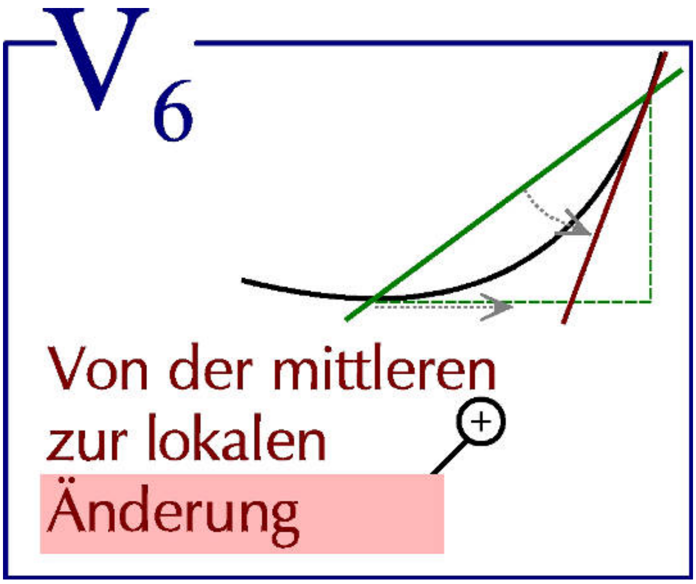
## Unterrichtsgang für die Sek II mit Computer-Algebra-System




Mit Lösungen für CASIO ClassPad II

3. Auflage

Unterrichtsversuch CiMS der Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg
Autoren: Jörg Kreyser, Helmut Springstein, CiMS Hamburg




# CAS Version

Stand: November 2013

# Inhaltsverzeichnis

# Allgemeines

## Didaktische Überlegungen

Der Unterricht mit der ständigen Verfügbarkeit eines CAS ermöglicht – viel stärker als das im bisherigen Mathematik-Unterricht zu leisten ist – einen handlungsorientierten und experimentellen Zugang zum Ableitungsbegriff zu finden. Die Arbeit mit einem propädeutischen Ableitungsbegriff steht daher in diesem Teil im Vordergrund. Ein vorschneller Übergang zum Kalkül kann der Ausprägung inhaltlicher Vorstellungen des Steigungsbegriffes im Wege stehen.

Man denke nur an die Antwort auf die Frage, was denn eine Ableitung sei. „Das ist doch dass, wenn man die Hochzahl minus eins nimmt und mit der Hochzahl malnimmt“.

In einem Unterricht, der mit einem CAS unterstützt wird, besteht die Möglichkeit, die zentrale Idee der Mathematik, die Grenzwertbildung (für stetige oder als stetig angenommene Probleme) durch Rückführung auf hinreichend gute zu transportieren. Der Anteil eines CAS besteht darin, dass mit Durchschnittswerten auch wirklich gerechnet werden kann. Damit kann eine solide Grundlage für den Grenzwertbegriff gebildet werden.

In diesem Material sind drei mögliche Einstiege beschrieben, die unabhängig voneinander aber auch parallel im Unterricht/Selbststudium eingesetzt werden können.

### 1. Vorbereitung des Ableitungsbegriffs

In diesem Abschnitt werden am Beispiel von Geschwindigkeiten und Steigungen Durchschnittsberechnungen durchgeführt. Die Tabellenkalkulation übernimmt die mühselige Arbeit von der Berechnung vieler einzelner Durchschnitte. Mit dem Funktionsplotter wird die Bewegung anhand von Zeit-Weg und Zeit-Durchschnittsgeschwindigkeit Graphen visualisiert.

### 2. Von der Sekanten- zur Tangentensteigung

Die Intervalle zur Berechnung von durchschnittlichen Steigungen oder Änderungen werden immer mehr verfeinert. Zuerst werden Steigungen an einzelnen Punkten eines Graphen näherungsweise bestimmt, anschließend wird die Steigungsberechnung auf den ganzen Graphen ausgedehnt. Schließlich werden mit dem CAS Sekantensteigungsfunktionen (für kleines und festes $h$) bestimmt und gezeichnet.

Die Idee dieses Abschnittes ist, dass Schülerinnen und Schüler mithilfe des CAS der Vorgang der Verfeinerung der Intervalle selbst vornehmen können und dadurch eine gute Grundlage für den Grenzwertbegriff erhalten.

Obwohl in diesem Abschnitt alles im diskreten Fall bleibt, werden doch schon Steigungsfunktionen gezeichnet, um die intuitiven Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu unterstützen.

Händische Zeichnungen von Schülerinnen und Schülern werden so viel wie möglich eingesetzt, damit sie sich schnell Überblicke verschaffen können und Sachzusammenhänge besser verstehen. Und, ganz wichtig, nicht von der Maschine abhängig zu werden. Es empfiehlt sich deshalb auch, derartige Aufgaben in Klausuren abzufragen.
Die Aufgabe V2 – 2-6 Steigungsfunktionen ist eigentlich keine CAS-Aufgabe. Sie ist nur der Vollständigkeit halber mit aufgenommen worden.

Abschließend ist noch die Funktionslupenmethode mit aufgenommen worden. Graphen von Funktionen werden so lange vergrößert, bis die Graphen an der zu untersuchenden Stelle wie eine Gerade aussehen. Von dieser Geraden wird die Steigung bestimmt, die dann der Steigung der Funktion an der entsprechenden Stelle entspricht.

## 3. Ableitungsregeln

In diesem Abschnitt war der CAS-Anteil im Projekt relativ gering.

Das CAS wird eingesetzt, um das selbstständigen Herausfinden der Potenzregel zu fördern. Zu einer gegebenen Funktion wird die Steigungsfunktion gezeichnet, eine Vermutung über dessen Term aufgestellt und die Vermutung mit dem CAS überprüft.

Weitere Ableitungsregeln sowie die Beweise wurden im Projekt im Allgemeinen ohne die Hinzunahme eines CAS unterrichtet.

Typische Schulbuchaufgaben zu den Ableitungsregeln konnten die Schülerinnen und Schüler allerdings selbständig mit dem Taschencomputer überprüfen. Das erwies sich als großer Vorteil, weil die Schülerinnen und Schüler ihr eigenes Tempo wählen und Fehler auf ihrem Lernniveau bearbeiten konnten.

## 4. Übungen zur Ableitung

Neben typischen Schulbuchaufgaben haben die Kolleginnen und Kollegen die aufgeführten Aufgaben gerne benutzt, weil dadurch Grundvorstellungen gestärkt werden.

Die Aufgabe „Kartenspiel“ setzt nicht den CAS-Einsatz voraus. Mit ihr soll demonstriert werden, dass die beteiligten Kolleginnen und Kollegen immer wieder Wert auf händische Fähigkeiten gelegt haben.

## 5. Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung

Die beiden Schwerpunkte bildeten Optimierungs- und Trassierungsaufgaben. Im achtstufigen Gymnasium wird der zweite Schwerpunkt allerdings eher in das erste Semester rutschen. Im Prinzip sind alle Aufgaben ohne ein CAS lösbar. In diesen Aufgaben geht es aber nicht darum, dass Schülerinnen und Schüler Termumformungen üben, sondern dass sie mit deren Hilfe Erkenntnisse gewinnen. Insbesondere Schülerinnen und Schüler, die mit diesen Termumformungen Schwierigkeiten haben, können sich durch die Abgabe der Termumformungen an ein CAS ganz auf das Wesentliche, hier das Aufstellen von funktionalen Zusammenhängen und die anschließende Lösung von Optimierungsaufgaben konzentrieren. Das ist nämlich schon schwer genug. Dieses ist ein entscheidender Grund für den Einsatz eines CAS.
Auch in einem computerunterstützten Unterricht wird erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler die Termumformungen dieser Aufgaben im Prinzip händisch lösen können. Nur eben nicht so schnell wie Schülerinnen und Schüler, die derartige Termumformungen intensiver geübt haben.
Im Gegensatz zu der Dosen-Aufgabe in V1 geht es in der Aufgabe Dose 2 im Wesentlichen nicht um die Berechnung der optimalen Größen von Oberflächen und Volumen einer Dose. Für die Berechnung optimaler Dosenmaße benötigt man bei der Benutzung eines CAS keine Differenzialrechnung. Erst die Beantwortung der Frage: „Ist das immer so?“ gelingt nicht mehr ohne Differenzialrechnung.
Die ausgeprägte Aufteilung in einen numerisch berechnenden Teil und in die allgemeine Fragestellung „Ist das immer so?“, geht auf einen Vortrag von Prof. Rainer Danckwerts zurück, den er unter dem Titel „Analysis anders unterrichten“ im September 2008 an der Universität Dortmund gehalten hat.

## Ergänzende Aufgaben

Ergänzende Aufgaben findet man u. a. in


[1] Barzel, Bärbel; Fröhlich, Ines; Stachniss-Carp, Sibylle
Das ABC der ganzrationalen Funktionen
Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2003

[2] Bruder, Regina (Hrsg.)
Aufgaben mit CAS Einsatz, Modellversuch 2004/2005 Hessen
Texas Instruments 2006

[3] mathe „open end“
Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra
Teil 1 Differenzialrechnung,
Westermann, Braunschweig 2001.

[4] Mathematik mit CAS
Band 2
Cornelsen Verlag, Berlin 2011

[5] Pallack, Andreas; Langlotz, Hubert (Hrsg.)
Differenzialrechnung mit neuen Medien verstehensorientiert unterrichten
$T^3$, Münster 2009

[6] Elemente der Mathematik
Mathematik mit neuen Technologien
Schroedel Verlag, Braunschweig 2006

[6] Lambacher Schweizer
Mathematik für Gymnasien, Gesamtband Oberstufe mit CAS
Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2007